PETRE NĂCHILĂ

Analiză matematică pentru toți

Clasa a XII-a

Editura NOMINA

Cuprins

Capitolul 1
PRIMITIVE

1.1. Noţiunea de primitivă. Operaţii cu funcţii care admit primitive

Definiţia 1. Fie intervalul $I \subset \mathbb{R}$ şi funcţia $f: I \to \mathbb{R}$. Spunem că funcţia f *admite primitive* pe I dacă există $F: I \to \mathbb{R}$, derivabilă pe I şi $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in I$. Funcţia F se numeşte *primitiva* lui f (sau antiderivata) pe intervalul I (funcţia f se numeşte *primitivabilă*).

Procedeul (operaţia) prin care se determină primitivele unei funcţii se numeşte *integrare* (sau antiderivare).

Teorema 1. Dacă $F_1, F_2: I \to \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcţiei $f: I \to \mathbb{R}$ (I interval), atunci ele diferă printr-o constantă (adică există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F_1(x) = F_2(x) + c$, $\forall\, x \in I$).

Notaţii: $\mathcal{F}(I) = \{f: I \to \mathbb{R}\}$; $\mathscr{C} = \{f: I \to \mathbb{R} \mid f \text{ constantă}\}$.

Pe $\mathcal{F}(I)$ se introduc operaţiile de „adunare a funcţiilor" şi „înmulţire cu scalari" astfel: fie $f, g \in \mathcal{F}(I)$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $f + g: I \to \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall\, x \in I$;
- $\alpha f: I \to \mathbb{R}$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall\, x \in I$.

Observaţii: 1. $\mathscr{C} \subset \mathcal{F}(I)$;

2. dacă $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(I)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}(I)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $\mathcal{F} + \mathcal{G} = \{f + g: I \to \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$; $\alpha\mathcal{F} = \{\alpha f: I \to \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{F}\}$;

3. $\alpha\mathscr{C} = \mathscr{C}$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}^*$; **4.** $\mathscr{C} + \mathscr{C} = \mathscr{C}$.

Definiţia 2. Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$. Mulţimea tuturor primitivelor lui f pe intervalul I se numeşte *integrala nedefinită* a lui f şi se notează $\int f(x)dx$. Dacă F este o primitivă a lui f, avem:

$$\int f(x)dx = F(x) + \mathscr{C}.$$

Observaţie. Definiţia primitivei unei funcţii poate fi extinsă pe reuniuni finite de intervale distincte. În acest caz, două primitive nu diferă printr-o constantă.

Exemplu. Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$. Luăm primitivele:

$F_1(x) = \begin{cases} x^2 - 5x, & x < 2 \\ x^2 - 5x + 4, & x > 2 \end{cases}$; $F_2(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 1, & x < 2 \\ x^2 - 5x + 1, & x > 2 \end{cases}$. Avem $(F_1 - F_2)(x) = \begin{cases} 1, & x < 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases}$.

Tabel de integrale nedefinte

Nr. crt.	Funcția	Integrala nedefinită
1.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}$	$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+\mathscr{C}$
2.	$f:I\to\mathbb{R}, I\subset(0,\infty), f(x)=x^a, a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\int x^a\,dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+\mathscr{C}$
3.	$f:I\to\mathbb{R}, I\subset(0,\infty), f(x)=\frac{1}{x}$	$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+\mathscr{C}$
4.	$f:I\to\mathbb{R}, I\subset(-\infty,0), f(x)=\frac{1}{x}$	$\int\frac{dx}{x}=\ln(-x)+\mathscr{C}=\ln\|x\|+\mathscr{C}$
5.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=a^x, a>0, a\neq 1$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+\mathscr{C}$
6.	$f:I\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2-a^2}, a>0,$ $I\subset\mathbb{R}\setminus\{-a,a\}$	$\int\frac{1}{x^2-a^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\|+\mathscr{C}$
7.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+a^2}, a\neq 0$	$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\mathscr{C}$
8.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sin x$	$\int\sin x\,dx=-\cos x+\mathscr{C}$
9.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\cos x$	$\int\cos x\,dx=\sin x+\mathscr{C}$
10.	$f:I\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\cos^2 x},$ $I\subset\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg}x+\mathscr{C}$
11.	$f:I\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}, I\subset\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg}x+\mathscr{C}$
12.	$f:I\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{tg}x,$ $I\subset\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\int\operatorname{tg}x\,dx=-\ln\|\cos x\|+\mathscr{C}$
13.	$f:I\to\mathbb{R}, f(x)=\operatorname{ctg}x, I\subset\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\int\operatorname{ctg}x\,dx=\ln\|\sin x\|+\mathscr{C}$
14.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}, a\neq 0$	$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)+\mathscr{C}$
15.	$f:I\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, a>0,$	$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx=\ln\left\|x+\sqrt{x^2+a^2}\right\|+\mathscr{C}$

Nr. crt.	Funcția	Integrala nedefinită
	$I \subset \mathbb{R} \setminus \{-\infty, -a\}$ sau $I \subset (a, \infty)$	
16.	$f : I \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $a > 0$, $I \subset (-a, a)$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \mathrm{d}x = \arcsin \dfrac{x}{a} + \mathscr{C}$

Teorema 2. Fie funcțiile f, $g : I \to \mathbb{R}$ care admit primitive pe intervalul I și fie $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Atunci funcțiile $f + g$, $\alpha f : I \to \mathbb{R}$ admit primitive pe I și avem:

a) $\int (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$;

b) $\int f(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \mathscr{C}$;

c) $\int (f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

Teorema 3. Orice funcție continuă pe intervalul I admite primitive pe I.

Probleme rezolvate

1. Determinați a, $b \in \mathbb{R}$, știind că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$, unde:

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2x + a, & x \le 0 \\ e^x + b, & x > 0 \end{cases}.$$

Soluție. O primitivă a lui f este de forma $F(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2 + ax + c, & x \le 0 \\ e^x + bx + c_1, & x > 0 \end{cases}$. Deoarece F este derivabilă în 0, rezultă că F este continuă în 0 și avem $F(0 - 0) = F(0) = F(0 + 0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow 0}(-x^3 + x^2 + ax + c) = \lim\limits_{x \searrow 0}(e^x + bx + c_1) = c \Leftrightarrow c_1 = c$. Deoarece F este derivabilă în 0, avem $F_s'(0) = F_d'(0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \nearrow 0}(-3x^2 + 2x + a) = \lim\limits_{x \searrow 0}(e^x + b) \Leftrightarrow a = b + 1$.

Avem deci $a = b + 1$, $b \in \mathbb{R}$ și $F(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2 + (b + 1)x + c, & x \le 0 \\ e^x + bx + c, & x > 0 \end{cases}$.

2. Determinați a, $b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $F(x) = (a \sin x + b \cos x) \cdot e^x$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, să fie o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-x} \sin x$.

Soluție. $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [(a - b) - (a + b)\sin x]e^{-x} = e^{-x} \sin x$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a - b = 0; -(a + b) = 1 \Leftrightarrow a = b = -\dfrac{1}{2}$.

3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{2x}\sin 4x$. Determinați a, $b \in \mathbb{R}$, astfel încât $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$F(x) = e^{2x}(a \sin 4x + b \cos 4x)$ să fie o primitivă a funcției f pe $\mathbb{R}$.

Soluție. F primitivă a lui $f \Rightarrow F$ este derivabilă și $F' = f$. Obținem $e^{2x}(2a \sin 4x + 2b \cdot \cos 4x + 4a \cos 4x - 4b \sin 4x) = e^{2x} \sin 4x$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2a - 4b)\sin 4x + (2b + 4a)\cos 4x = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2a - 4b = 1$ și $2b + 4a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{10}, b = -\frac{1}{5}$.

4. Fie $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ și funcția $g(x) = ax + b$. Demonstrați că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite primitiva F, atunci funcția $\frac{1}{a} \cdot F \circ g$ este primitiva funcției $f \circ g$ pe $\mathbb{R}$.

Soluție. Fie $G : I \to \mathbb{R}$, $G(x) = \frac{1}{a}(F \circ g)(x) = \frac{1}{a} \cdot F(ax+b)$. Funcția este derivabilă și $G'(x) = \frac{1}{a} \cdot F'(ax+b) \cdot (ax+b)' = \frac{1}{a}(f \circ g)(x) \cdot a = (f \circ g)(x)$, $\forall\, x \in I$. Deci G este primitiva funcției $\frac{1}{a} \cdot F \circ g$.

5. Calculați pe intervalele I convenabil alese:

a) $\int \frac{1}{ax+b} dx$;

b) $\int (ax+b)^n dx$, $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$;

c) $\int \sin(ax+b) dx$;

d) $\int d^{ax+b} dx$.

Soluție. Conform exercițiului rezolvat 4, avem: a) $F(x) = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + \mathcal{C}$, $-\frac{b}{a} \notin I$; b) $\frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C}$; c) $-\frac{1}{a}\cos(ax+b) + \mathcal{C}$; d) $\frac{1}{a} \cdot \frac{d^{ax+b}}{\ln d}$, $x \in I$, $d \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.

6. Demonstrați că funcțiile F_1 și F_2 sunt primitive ale aceleiași funcții $f : I \to \mathbb{R}$:

a) $F_1(x) = 2\operatorname{arctg} x$; $F_2(x) = -\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$; $I = \mathbb{R}$;

b) $F_1(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; $F_2(x) = \frac{1}{2}\arcsin x$; $I = (-1, 1)$.

Soluție. a) $f(x) = F_1'(x) = F_2'(x) = \frac{2}{1+x^2}$; b) $f(x) = F_1'(x) = F_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$.

7. Calculați următoarele primitive:

a) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$, $x \in (0, \pi)$;

b) $\int \frac{4 - 2\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$, $x \in (0, \pi)$;

d) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

e) $\int \sqrt[3]{3x+1}\,dx$, $x \in \mathbb{R}$; f) $\int \frac{1}{\sqrt[5]{3x-3}}dx$, $x \in (1, \infty)$;

g) $\int \sqrt[5]{4x^2+4x+1}\,dx$, $x \in \mathbb{R}$; h) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1+2\sqrt{x^2+x}}}dx$, $x \in (0, \infty)$;

i) $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$, $x \in \mathbb{R}$; j) $\int \frac{1}{x^4-5x^2+4}dx$, $x \in (2, \infty)$.

Soluție. a) $\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \operatorname{ctg}^2 x\,dx - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + \mathscr{C}$;

b) $\int \frac{4\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int 4dx + 2\int \operatorname{tg}^2 x dx = 4x + 2\operatorname{tg} x + \mathscr{C}$;

c) $\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + \mathscr{C}$;

d) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^3 x}dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + \mathscr{C}$;

e) $\int (3x+1)^{\frac{1}{3}}dx = \frac{(3x+1)^{1+\frac{1}{3}}}{3 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \cdot (3x+1)^{\frac{4}{3}}$; f) $\int (3x-3)^{-\frac{2}{5}}dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-3)^{-\frac{2}{5}+1}}{\frac{3}{5}} =$

$= 5(3x-3)^{\frac{3}{5}}$; g) $\int (2x+1)^{\frac{2}{5}}dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}} = \frac{5}{14}(2x+1)^{\frac{7}{5}}$; h) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}dx =$

$= \int \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)dx = \frac{2}{3}\left(\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - \left(\sqrt{x}\right)^3\right)$.

Probleme propuse

A. Determinați următoarele integrale nedefinite:

1. $\int \left(2x^4 - 4x^3 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}\right)dx$, $x > 0$; **2.** $\int \left(6\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}\right)dx$, $x < 0$;

3. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{5}{2}\sqrt{x^3}\right)dx$, $x > 0$; **4.** $\int \left(4e^{4x} - 2e^{-2x}\right)dx$, $x \in \mathbb{R}$;

5. $\int (6\operatorname{ctg} 3x - 2\operatorname{tg} 2x)dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$; **6.** $\int \left(\frac{2}{\cos^2 4x} - \frac{4}{\sin^2 2x}\right)dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$;

7. $\int \left(\frac{1}{2x-2} - \frac{2}{3x+6}\right)dx$, $x \in (1, \infty)$; **8.** $\int \frac{\sqrt{x^2-4}-2}{x^2-4}dx$, $x > 2$;

9. $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$, $x \in \mathbb{R}$; **10.** $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

11. $\int \frac{2x^2-3}{(x^2-4)(x^2+1)}dx$, $x<-2$;

12. $\int \frac{4-2\sqrt{x^2+4}}{x^2+4}dx$, $x\in\mathbb{R}$;

13. $\int x(x-2)(x+1)\,dx$, $x\in\mathbb{R}$;

14. $\int (\mathrm{tg}^2 x+\mathrm{ctg}^2 x)\,dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

15. $\int \frac{\sqrt{2+x^2}+\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx$, $x\in\left(0,\sqrt{2}\right)$;

16. $\int \frac{x^m-x^n}{\sqrt{x}}dx$, $x>0$, $m, n\in\mathbb{N}^*$;

17. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

18. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

19. $\int \frac{1}{\cos x}dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

20. $\int \frac{1}{\sin x}dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

21. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$, $x>0$;

22. $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}dx$, $x\in\mathbb{R}$;

23. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

24. $\int \mathrm{tg}^2 x\,dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

25. $\int \mathrm{ctg}^2\,dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

26. $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$, $x\in\mathbb{R}$;

27. $\int \frac{2x^2+1}{x^2(1+x^2)}dx$, $x>0$;

28. $\int \frac{(1+x)^2}{x(x^2+1)}dx$, $x>0$;

29. $\int \frac{1}{\cos 2x+\sin^2 x}dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

30. $\int (\arcsin x+\arccos x)\,dx$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

B. Determinați primitivele următoarelor funcții:

31. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}2e^x+3x, & x\le 0\\ (x+1)^2, & x>0\end{cases}$;

32. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x^2}, & x\le 1\\ 1+\sqrt{x}, & x>1\end{cases}$;

33. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^2+1}, & x\le 0\\ 2-\sqrt{x}, & x>0\end{cases}$;

34. $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}3+\mathrm{tg}, & x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\\ \sin x+3\cos x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$;

35. $f:[0, 4]\to\mathbb{R}, f(x)= x+\sqrt{x^2-4x+4}$;

36. $f:[-3, 4]\to\mathbb{R}, f(x)=\min(x^2-4; x+2)$.

C. Demonstrați că au loc egalitățile următoare, precizând și un interval corespunzător:

37. $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \mathscr{C}$;

38. $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + \mathscr{C}$;

39. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \cos x + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \mathscr{C}$;

40. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + \mathscr{C}$;

41. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = -\frac{1}{2\sin^2 x} + \mathscr{C}$;

42. $\int \frac{1}{\sin x \cos x} dx = \ln(\operatorname{tg} x) + \mathscr{C}$.

D.

43. Fie funcția pară și continuă $f : I \to \mathbb{R}$, I interval simetric. Demonstrați că dacă $F : I \to \mathbb{R}$ este primitiva lui f pentru care $F(0) = 0$, atunci F este funcție impară.

44. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcție continuă și periodică de perioadă $T > 0$. Dacă F este primitiva funcției f care verifică relația $F(T) = F(0)$, atunci F este o funcție periodică cu perioada T.

45. Determinați funcțiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au primitivele F cu proprietatea $F(x) + f(x) = \frac{2x+1}{e^x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

46. Determinați funcțiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care există primitiva F astfel încât $f(x) = F(x) + e^x \cos x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

47. Demonstrați că dacă $f, g : I \to \mathbb{R}$, sunt f primitivabilă, iar g derivabilă cu derivata continuă, atunci $f \cdot g$ admite primitive pe intervalul I.

48. Fie F o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, iar f este mărginită pe $\mathbb{R}$. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(c) f(c) = c^{2n-1}$.

49. Fie $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) \sin x$, $h(x) = f(x) \cos x$. Atunci f admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă g și h admit primitive pe $\mathbb{R}$.

50. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitive F cu proprietatea:

$$f(x) + F(x) = |x|, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

51. Determinați funcțiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitivele F cu proprietatea:

$$f(x) = F(x) + e^{2x} \sin x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

1.2. Funcţii care admit primitive

Teorema 1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ interval şi funcţia $f: I \to \mathbb{R}$ care admite primitiva $F: I \to \mathbb{R}$. Fie $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Atunci:

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + \mathscr{C}.$$

Teorema 2. Orice funcţie continuă pe intervalul I admite primitive pe I.

Teorema 3. O funcţie care admite primitive are proprietatea lui Darboux.

Demonstraţie. Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ admite primitive, atunci există $F: I \to \mathbb{R}$, cu $F' = f$. Dar dacă o funcţie (F) este derivabilă, atunci derivata sa (f) are proprietatea lui Darboux.

Consecinţe. 1. Dacă $f(I)$ nu este interval, atunci f nu admite primitive pe I.

2. Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ este o funcţie cu discontinuităţi de speţa I, atunci f nu admite primitive pe I. Un punct $x_0 \in I$ se numeşte *punct de discontinuitate de prima speţă* dacă limitele laterale în x_0 există şi sunt finite. Un punct de discontinuitate în care cel puţin una din limitele laterale nu există sau nu este finită se numeşte *punct de discontinuitate de speţa a doua.*

3. Dacă notăm cu C, P, D mulţimea funcţiilor continue, a funcţiilor care admit primitive, respectiv au proprietatea lui Darboux, avem incluziunile $C \subset P \subset D$.

4. Suma dintre o funcţie care admite primitive şi una care nu admite primitive este o funcţie care nu admite primitive.

5. Putem să considerăm operaţia de integrare ca fiind „inversa” operaţiei de derivare, cu observaţiile următoare:

i) rezultatul derivării are proprietatea de unicitate, iar al integrării nu este unic;

ii) prin derivare se ajunge la forma explicită a funcţiei derivate, iar prin integrare nu se ajunge întotdeauna la forma explicită. Nu pot fi calculate (explicit) integrale ca:

$\int \frac{\sin x}{x}dx$, $\int \frac{x}{\sin x}dx$, $\int \frac{x}{\sin^3 x}dx$, $\int \frac{x}{\cos x}dx$, $\int \frac{\cos x}{x}dx$, $\int \frac{x}{\cos^3 x}dx$, $\int x\,\mathrm{tg}\,x\,dx$, $\int x\,\mathrm{ctg}\,x\,dx$, $\int \frac{e^x}{x}dx$, $\int \frac{e^x}{x^2}dx$.

Exemple: 1. $\int (2x-1)^2\,dx = \frac{1}{6}(2x-1)^3 + \mathscr{C}$;

2. $\int (-2x+3)^3\,dx = -\frac{1}{8}(-2x+3)^4 + \mathscr{C}$;

3. $\int \frac{1}{4x-1}dx = \frac{1}{4}\ln(4x-1) + \mathscr{C},\ x \in \left(\frac{1}{4}, \infty\right)$;

4. $\int \sin(4x-3)\,dx = -\frac{1}{4}\cos(4x-3) + \mathscr{C}$.

Calculul primitivelor unei funcții f definite pe subintervale

Considerăm $f : I \to \mathbb{R}$ care admite primitive pe intervalul I. Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \subset I$, cu $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Considerăm intervalele $I_1 = I \cap (-\infty, a_1]$, $I_2 = (a_1, a_2)$, ..., $I_n = (a_{n-1}, a_n]$, $I_{n+1} = (a_n, \infty) \cap I$. Funcția f admite primitiva $F_k(x) = F(x) + \mathscr{C}_k$, unde F este primitiva lui f pe I. În orice punct $a \in A$ avem $F(a) = F(a - 0) = F(a + 0)$. Dacă a este extremitatea „stângă" a lui I, avem $F(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} F(x)$. Dacă a este extremitatea „dreaptă" a lui I, avem $F(a) = \lim\limits_{x \searrow a} F(x)$.

Probleme rezolvate

1. Fie funcțiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x + a)f(x)$, $h(x) = xf(x + a)$, $a \in \mathbb{R}^*$.

a) Demonstrați că, dacă g și h admit primitive pe $\mathbb{R}$, atunci f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Determinați o primitivă a lui f cu ajutorul primitivelor lui g și h.

Soluție: a) Fie G, H primitive pe $\mathbb{R}$ ale lui g, respectiv h. Avem $g(x + a) - h(x) = (x + 2a) \cdot f(x + a) - xf(x + a) = 2af(x + a)$ și deci $f(x) = \dfrac{1}{2a}(g(x) - h(x - a))$. O primitivă a funcției $x \to h(x - a)$ este $H(x - a)$. Deci, o primitivă a lui f este $F(x) = \dfrac{1}{2a}(G(x) - H(x - a))$.

2. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1, & x \le 0 \\ ax + 1, & x \in (0, 1] \\ bx - 2, & x > 1 \end{cases}$ să admită primitive pe $\mathbb{R}$.

Soluție: O primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$ are forma $F(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x + c_1, & x \le 0 \\ \dfrac{ax^2}{2} + x + c_2, & x \in (0, 1] \\ \dfrac{bx^2}{2} - 2x + c_3, & x > 1 \end{cases}$. Din condițiile $F(0) = F(0 - 0) = F(0 + 0)$; $F(1 - 0) = F(1) = F(1 + 0)$ obținem $c_1 = c_2$, $\dfrac{a}{2} + 1 + c_2 = \dfrac{b}{2} - 2 + c_3$. Deoarece F este derivabilă în 0 și 1, avem $F_s'(0) = F_d'(0)$; $F_s'(1) = F_d'(1)$, adică $\lim\limits_{x \nearrow 0}(3x^2 - 2x + 1) = \lim\limits_{x \searrow 0}(ax + 1)$; $\lim\limits_{x \nearrow 1}(ax + 1) = \lim\limits_{x \searrow 1}(bx - 2) \Leftrightarrow b = a + 3$, $a \in \mathbb{R}$.

Avem $F(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + x + c, \ x \le 0 \\ \dfrac{ax^2}{2} + x + c, \ x \in (0,1] \\ \dfrac{a+3x}{2} - 2x + \dfrac{9}{2} + c, \ x > 1 \end{cases}$.

3. Fie $K = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ admite primitive și $f^2(x) = x^2, \ \forall x \in \mathbb{R}\}$.

a) Determinați card K.

b) Determinați $\int f(x)dx$.

c) Ce structură algebrică are $(K, \circ)$?

Soluție: a) Demonstrăm că $f(x) = x$ pentru orice $x > 0$ sau $f(x) = -x$ pentru orice $x > 0$. Presupunem că există $a > 0$, $b > 0$, cu $f(a) = a$, $f(b) = -b$. Cum $f(a)f(b) < 0$, atunci ar exista c între a și b, cu $f(c) = 0$, de unde $0 = f^2(c) = c^2$ și deci $c = 0$ (contradicție). Analog avem $f(x) = x$ pentru orice $x < 0$ sau $f(x) = -x$ pentru orice $x < 0$. Există deci patru funcții date de $f_1(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = -x, \ \forall x \in \mathbb{R}$, $f_3(x) = |x|, \ \forall x \in \mathbb{R}$, $f_4(x) = -|x|, \ \forall x \in \mathbb{R}$; b) $\int f_1(x)dx = \dfrac{x^2}{2} + \mathcal{C}$, $\int f_2(x)dx = -\dfrac{x^2}{2} + \mathcal{C}$, $\int f_3(x)dx = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, \ x \ge 0 \\ -\dfrac{x^2}{2}, \ x < 0 \end{cases}$,

$\int f_4(x)dx = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2}, \ x \le 0 \\ \dfrac{x^2}{2}, \ x > 0 \end{cases}$; c) Avem $(K, \circ)$ monoid necomutativ.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_3	f_3	f_3
f_4	f_4	f_4	f_4	f_4

4. a) Determinați funcțiile polinomiale $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ pentru care există o primitivă $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) + xf(x) = 1 + x^2, \ \forall x > 0$ (*).

b) Determinați toate funcțiile $f, F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea (*).

Soluție: a) $F(x) = ax^2 + bx + c$, $x > 0$, $f(x) = 2ax + b$; $3ax^2 + 2bx + c = 1 + x^2 \Rightarrow a = \dfrac{1}{3}$, $b = 0$, $c = 1 \Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{3}x^2 + 1$, $f(x) = \dfrac{2x}{3}$; b) Dacă $F_0(x) = \dfrac{1}{3}x^2 + 1$ și $F' + xF' = 1 + x^2$, atunci $g = F - F_0$ și $xg' + g = 0, \ \forall x > 0 \Rightarrow (xg')' = 0, \ \forall x > 0 \Rightarrow xg(x) = c > 0$ $\Rightarrow g(x) = \dfrac{c}{x}, \ \forall x > 0 \Rightarrow F(x) = \dfrac{k}{x} + \dfrac{1}{3}x^2 + 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{c}{x^2}, \ \forall x > 0$.

5. Determinați primitiva funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\text{arctg}\, x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Soluție: Funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$ (compunere de funcții trigonometrice, polinomia-